

TD n°5: Séries de Laurent, fonctions méromorphes et résidus

Analyse complexe 2024-2025, Thomas Serafini
tserafini@dma.ens.fr

Exercices à faire en priorité : 1-2-4-5-6-9-10-12. Les exercices marqués d'un  sont des exercices plus difficiles, plus longs, ou plus loin du cours.

Singularités, fonctions méromorphes

Exercice 1. Types de singularités.

Déterminer, pour les couples f, S suivants, les types des singularités (apparente, essentielle, pôle d'ordre n) de f en $s \in S$:

1. $\frac{z}{e^z - 1}$, $S = 2i\pi\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$,
2. $\sin(z)$, $S = \{\infty\}$,
3. $P(z)/Q(z)$, $P, Q \in \mathbb{C}[z]$ $S = Q^{-1}(0) \cup \{\infty\}$,
4. f une fonction entière non-polynomiale, $S = \{\infty\}$.

Exercice 2. Fonctions holomorphes sur $\mathbb{C} \setminus S$.

Soit $S \subseteq \mathbb{C}$ fini. Démontrer que toute fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus S$ s'écrit

$$f(z) = \psi_\infty(z) + \sum_{a \in S} \psi_a \left(\frac{1}{z - a} \right)$$

avec ψ_a, ψ_∞ des fonctions entières. A quelle condition une telle fonction est-elle méromorphe en a ?

Exercice 3. Fonctions méromorphes sur un ouvert non-connexe.

Soit U un ouvert non-connexe de $\mathbb{C}$, on écrit $U = \coprod_i U_i$ avec U_i les composantes connexes de U . Démontrer qu'on a un isomorphisme d'anneaux

$$\mathcal{M}(U) \xrightarrow{\sim} \prod_i \mathcal{M}(U_i)$$

donné par $f \mapsto (f|_{U_i})_i$.

Théorème des résidus

Exercice 4. Quelques calculs.

1. Démontrer que si f a un zéro d'ordre 1 en a alors

$$\text{Res}_a(1/f) = \frac{1}{f'(a)}.$$

2. Calculer le résidu de $\frac{1}{z^n - 1}$ en $e^{\frac{2k\pi i}{n}}$,
3. Calculer le résidu de $\cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$ en $n\pi$,
4. Démontrer que si $f \in \mathcal{M}(U)$ a un pôle d'ordre n en $a \in U$, alors

$$\text{Res}_a(f) = \frac{1}{(n-1)!} \left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} ((z-a)^n f(z)) \right]_{z=a}.$$

¹Merci à Hadrien pour ce raton-laveur en Tikz !

Exercice 5. Autour des résidus.

On fixe f une fonction holomorphe au voisinage de $a \in \mathbb{C}$ et g une fonction méromorphe au voisinage de a .

1. Supposons que f ne s'annule pas et que g a un pôle d'ordre 1 en a . Démontrer

$$\operatorname{Res}_a(fg) = f(a)\operatorname{Res}_a(g).$$

2. Supposons à présent que g a un pôle d'ordre n en a , on écrit

$$f(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots$$

$$g(z) = b_{-n}(z-a)^{-n} + \dots + b_{-1}(z-a)^{-1} + b_0 + \dots$$

Démontrer que

$$\operatorname{Res}_a(fg) = \sum_{i+j=-1} a_i b_j.$$

Exercice 6. Résidus de fractions rationnelles.

Soient $f(z) \in \mathbb{C}(z)$ une fraction rationnelle de degré $\deg(f) \leq -2$ (où $\deg(f) = \deg(p) - \deg(q)$ si $f = p/q$).

1. Démontrer à l'aide du théorème des résidus que

$$\sum_a \operatorname{Res}_a(f) = 0$$

2. Démontrer que si de plus $f \in \mathbb{R}(z)$ et n'a pas de pôle sur $\mathbb{R}$, alors $\sum_{\Im(a)>0} \operatorname{Res}_p(f)$ est un imaginaire pur.
3. Mettre ces résultats en défaut si la condition sur $\deg(f)$ n'est pas vérifiée.
On ne suppose plus rien sur $\deg(f)$ et on définit, pour $f \in \mathbb{C}(z)$, le résidu en l'infini de f comme le résidu en $w = 0$ de $-\frac{1}{w^2}f(1/w)$.
4. Démontrer que $-\frac{1}{w^2}f(1/w)$ admet un zéro d'ordre $-\deg(f) - 2$ en $w = 0$ (où on considère un pôle d'ordre n comme un zéro d'ordre $-n$).
5. En intégrant $f(z)dz$ sur un cercle de rayon $R > \sup_{f(z)=\infty} |z|$, démontrer que

$$\operatorname{Res}_\infty(f) = - \sum_a \operatorname{Res}_a(f).$$

Indication : Un cercle de rayon $R \gg 1$ orienté dans le sens direct est un petit cercle de rayon $1/R \ll 1$ orienté dans le sens indirect autour de l'infini.

Exercice 7. Nombre de zéros et pôles d'une fonction rationnelle. Soit $f(z) \in \mathbb{C}(z)$. On définit, pour $a \in \mathbb{C}$ $v_a(f) = n$ si f a un zéro d'ordre n en a , $v_a(f) = -n$ si f a un pôle d'ordre n en a (en particulier, $v_a(f) = 0$ si f n'a ni zéro ni pôle en a .) On définit $v_\infty(f) = -\deg(f)$.

1. Démontrer que $v_a(f) = \operatorname{Res}_a(f'/f)$ pour tout $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.
2. A l'aide de l'exercice précédent, démontrer que

$$\sum_{a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}} v_a(f) = 0.$$

Autrement dit, une fonction rationnelle a toujours autant de zéros que de pôles, comptés avec multiplicités.

Exercice 8. Reformulation cohomologique des résidus

Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $S \subseteq U$ un ensemble fini, et on note $\mathcal{O}(*S)(U)$ l'ensemble des fonctions méromorphes sur U holomorphes sur $U \setminus S$. On considère un lacet C^1 par morceaux $\sigma : [0, 1] \rightarrow U \setminus S$. On note finalement $d : \mathcal{M}(U) \rightarrow \mathcal{M}(U)$ la dérivée.

1. Vérifier que d envoie $\mathcal{O}(*S)(U)$ dans lui-même.
2. Rappeler pourquoi $\int_\sigma : \mathcal{O}(*S)(U) \rightarrow \mathbb{C}$ envoie l'image de d sur zéro. En déduire que $\int_\sigma$ se factorise en

$$\int_\sigma : H_{\text{dR},S}^1(U) := \mathcal{O}(*S)(U)/\text{im}(d) \rightarrow \mathbb{C}.$$

Pour la suite, on suppose que U est simplement connexe.

3. Montrer que f admet une primitive (i.e. est dans l'image de d) si, et seulement si ses résidus en chaque élément de s sont nuls. On pourra utiliser le fait qu'une fonction holomorphe sur un ouvert simplement connexe admet toujours une primitive holomorphe.
4. En déduire que l'application $\mathcal{O}(*S)(U) \rightarrow \mathbb{C}^S$ donnée par

$$f \mapsto (\text{Res}_a(f))_{a \in S}$$

induit un isomorphisme de $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels

$$H_{\text{dR},S}^1(U) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^S$$

5. Reformuler le théorème des résidus en terme de cet isomorphisme.

Calculs d'intégrales par théorème des résidus

Exercice 9. Une transformée de Fourier.

Calculer, pour $\xi \in \mathbb{R}$, l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\xi x}}{1+x^2} dx.$$

On pourra distinguer les cas $\xi \geq 0$ et $\xi \leq 0$.

Exercice 10. Encore une intégrale.

Soient $s \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ vérifiant $0 < \Re(s) < n$. Calculer

$$\int_0^\infty \frac{x^s}{1+x^n} \frac{dx}{x}$$

à l'aide du contour donné par les segments $[0, R]$ et $[Re^{2i\pi/n}, 0]$ (avec l'orientation) et l'arc de cercle $Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{n}$.

Exercice 11. Jamais deux sans trois.

Calculer, pour $0 < \Re(s) < n$, l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{x^s \log(x)}{1+x^n} \frac{dx}{x}$$

en s'aidant du résultat de l'exercice précédent. Bonus : la même, avec un $\log(x)^k$.

Exercice 12. Une dernière pour la route.

Soit $f(z) \in \mathbb{C}(z)$ à pôles simples, sans pôle dans $\mathbb{R}_{\geq 0}$, et $s \in \mathbb{C}$ vérifiant $0 < \Re(s) < -\deg(f)$. Calculer

$$\int_0^\infty x^s f(x) \frac{dx}{x}$$

en fonction des $\text{Res}_a(f)$ à l'aide d'un contour Pac-Man. Appliquer à $f(z) = \frac{1}{1+z+z^2}$.

Indication : on pourra définir une détermination du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$ par $L(z) := \log(-z) + i\pi$.

Exercice 13. Représentation intégrale de la fonction ϑ

On pose, pour $\Im(\tau) > 0$:

$$\vartheta(\tau) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i\pi n^2 \tau}.$$

Soit $a > 0$. Démontrer que

$$\vartheta(\tau) = -i \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{i\pi \tau x^2} \cot(\pi x) dx.$$